Réduction des endomorphismes en dimension finie

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B}$, u désigne un endomorphisme de E et A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

I. Transposition aux matrices

1°) Eléments propres d'une matrice

Déf : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\}$.

Déf : Si $E_\lambda(A) \neq \{0\}$ alors on dit que λ est valeur propre de A, que $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ et tout $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ est vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Déf : On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appelé spectre de A.

Théorème :

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$ et vecteurs propres et sous-espaces propres associés à une même valeur propre se correspondent via représentation matricielle.

Cor : Deux matrices semblables ont le même spectre.

2°) Polynôme d'une matrice

Déf : Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on appelle valeur de P en A la matrice $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$.

Théorème :

L'application $\varphi_A : \mathbb{K}[X] \to M_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_A(P) = P(A)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Cor : Les identités polynomiales se transposent aux matrices.

Déf : On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'image du morphisme φ_A : c'est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{K})$ dont les éléments sont appelés polynômes en A.

3°) Polynôme annulateur

Déf : Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de A ssi $P(A) = O_n$.

Théorème :

Il existe un unique polynôme unitaire Π_A tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit $\Pi_A.\mathbb{K}[X]$.

Déf : Π_A est appelé polynôme minimal de A.

Prop : $\Pi_A(A) = 0$ et $P(A) = 0 \Rightarrow \Pi_A \mid P$.

4°) Valeur propre et polynôme annulateur

Prop : Si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.

Théorème :

Si P est annulateur de A alors les valeurs propres de A figurent parmi les racines de P.

Prop : Les valeurs propres de A sont les racines de Π_A.

II. Polynômes caractéristiques

1°) Polynôme caractéristique d'une matrice

La théorie des matrices et des déterminants vaut pour des objets dont les coefficients évoluent dans un corps, puisque $\mathbb{K}(X)$ est un corps, on peut parler de matrice et de déterminant à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$.

Théorème :

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_A = \det(A - XI_n)$ est un polynôme de degré n de la forme :

$\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + \det(A)$.

Déf : $\chi_A = \det(A - X.I_n)$ est appelé polynôme caractéristique de la matrice A.

Prop : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

2°) Polynôme caractéristique et éléments propres

Théorème :

Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.

Cor : $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres.

Cor : $A \in M_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.

3°) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Prop : Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$.

Déf : On appelle polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de l'une des matrices représentatives de u.

Théorème :

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est un polynôme de degré n de la forme :

$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + \det(u)$.

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.

Cor : $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au plus $\dim E$ valeurs propres.

Cor : Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel alors $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une valeur propre.

Prop : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Prop : Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et si chaque F_i est stable par u alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_{F_i}}$.

4°) Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Déf : On appelle ordre de multiplicité noté $m_\lambda(u)$ d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u (resp. d'une matrice A) l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u (resp. de χ_A).

Prop : Si χ_u est scindé alors $\operatorname{tr}(u)$ et $\det(u)$ sont la somme et le produit des valeurs propres de u comptées avec multiplicité. On a un résultat semblable en termes matriciels.

Théorème :

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ alors $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)$.

Cor : Si λ est racine simple de χ_u alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

5°) Théorème de Cayley Hamilton

Théorème :

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est un polynôme annulateur de u.

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, χ_A est un polynôme annulateur de A.

Cor : Le polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice) divise le polynôme caractéristique et est donc de degré inférieur à n.

III. Diagonalisation

1°) Définition

Déf : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable ssi il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit diagonale. Une telle base est appelée base de diagonalisation de u.

Prop : Si u est diagonalisable alors une base de diagonalisation est nécessairement constituée de vecteurs propres de u et les coefficients diagonaux de la matrice diagonale formée sont les valeurs propres de u comptées avec multiplicité.

Déf : Une matrice A est dite diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

Prop : Une matrice diagonalisable est semblable à une matrice diagonale où figurent ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

2°) Diagonalisabilité et sous-espaces propres

Théorème :

Soit u un endomorphisme de E de valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. On a équivalence entre :

(i) u est diagonalisable

(ii) E est la somme directe des sous-espaces propres de u : $E=\bigoplus_{j=1}^{m} E_{\lambda_j}(u)$.

(iii) $\sum_{j=1}^{m}\dim E_{\lambda_j}(u)=\dim E$.

Cor : On a équivalence entre :

(i) u est diagonalisable

(ii) χ_u est scindé et pour tout $\lambda\in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u)=m_\lambda(u)$

Théorème : (Condition suffisante fréquemment rencontrée)

Si $u\in\mathcal{L}(E)$ admet $n=\dim E$ valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Cor : Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

3°) Décomposition spectrale

Soit u un endomorphisme diagonalisable. Notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ ses valeurs propres.

On a $E=\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$ et dans une base adaptée à cette décomposition la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{n_m} \end{pmatrix} \text{ avec } n_i=\dim E_{\lambda_1}(u)=\omega(\lambda_i).$$

Notons $(p_i)_{1\le i\le m}$ la famille de projecteurs associée à cette somme directe :

p_i est la projection sur E_{λ_i} parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} E_{\lambda_j}(u)$, $p_i\circ p_i=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ p_i \text{ sinon}\end{cases}$, $\mathrm{Id}=\sum_{i=1}^{m} p_i$.

On a la relation $u=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p_i$.

Déf : Cette relation est appelée décomposition spectrale de l'endomorphisme diagonalisable u.

4°) Polynôme annulateur et diagonalisabilité

Théorème :

Soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ les valeurs propres de u. On a équivalence entre :

(i) u est diagonalisable

(ii) u annule le polynôme $\prod_{j=1}^{m}(X-\lambda_j)$.

De plus si tel est le cas $\Pi_u=\prod_{j=1}^{m}(X-\lambda_j)$

Cor : u est diagonalisable ssi Π_u est scindé à racine simple.

Théorème :

Un endomorphisme est diagonalisable ssi il annule un polynôme scindé à racines simples.

Cor : Si u est diagonalisable et F un sous-espace vectoriel stable par u alors u_F est diagonalisable.

IV. Trigonalisation

1°) Trigonalisabilité (17 lettres)

Déf : Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable ssi il existe une base E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Une telle base est dite base de trigonalisation de l'endomorphisme u.

Prop : Si u est trigonalisable alors χ_u est scindé et la matrice de u dans une base de trigonalisation à sa diagonale formée des valeurs propres de u comptée avec multiplicité.

Déf : Une matrice est dite trigonalisable ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

2°) Caractérisation de la trigonalisabilité

Théorème :
Un endomorphisme u est trigonalisable ssi il annule un polynôme scindé.

Cor : Un endomorphisme est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.
En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

Cor : Si F est stable par u et u trigonalisable alors u_F est trigonalisable.